Tentamen W5, 5 maart 2002, 9.00-12.00 Tentamenhal

(1) U is een open, niet lege, deelverzameling van het complexe vlak $\mathbf{C}$.
(a) Geef de definities van "U is wegsamenhangend" (Engels: pathwise connected) en van "U is enkelvoudig samenhangend" (Engels: simply connected).
(b) Is $U := \{z \in \mathbf{C} | |z-1| > 1\}$ wegsamenhangend? Is U enkelvoudig samenhangend? Geef argumenten bij Uw antwoord.

(2) U is een open deelverzameling van $\mathbf{C}$ en $f : U \to \mathbf{C}$ is een functie.
(a) Wanneer voldoet f aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen?
(b) Voldoet de functie $f(x+iy) = x - y^2 + ixy$ aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen?

(3) (a) Geef een voorbeeld van een analytische funktie op $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ met een pool van orde 5 in het punt $z = 1$.
(b) Geef een voorbeeld van een analytische funktie op $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ met een essentiele singulariteit in $z = 1$.

(4) Laat $U := \{z \in \mathbf{C} | Re(z) > 0\}$. Bewijs dat er een unieke holomorfe funktie $f : U \to \mathbf{C}$ bestaat met $(f(z))^4 = z$ en $f(1) = 1$. Bereken de eerste drie termen van de machtreeksontwikkeling van f in het punt 1.

(5) Bereken het *minimum* van $\{|f(z)| \, |1 \le |z| \le 5\}$, waarbij $f(z) = \frac{z-10}{z^3}$.

(6) Wat is de convergentiestraal r van een machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$? Bereken de convergentiestralen van de machtreeksen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n!)}{(n)!^4} z^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n n^4 z^{2n}$.

(7) Bereken de gebroken lineaire transformatie (fractional linear transformation) F die voldoet aan $F(0) = \infty,\ F(1) = 1,\ F(\infty) = 2$.

(8) Bereken de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx$.

(9) C is de cirkel met middelpunt 0, straal $\frac{17}{4}$ en voorzien van orientatie van de klok. Bereken $\int_C \frac{1}{e^{\pi i z}-1} dz$.

(10) $S := \{3n | n \in \mathbf{Z},\ n \ge 0\}$. Produceer een holomorfe funktie F op $\mathbf{C}$ zó dat S de verzameling van zijn nulpunten is en bovendien elk nulpunt orde 1 heeft. Hint: Weierstrass produkten.